

# Vitesse de phase, dispersion, effet Doppler, pour des ondes à la surface de l'eau

par **Jean-Marie GREUET**

Lycée Clémenceau - 34060 Montpellier  
chrisgr@club-internet.fr

avec la collaboration technique de **Jean-Pierre LEMOINE**  
*Aide-technique au SAMS (Service académique du matériel scientifique)*  
Lycée Joffre - 34000 Montpellier

## RÉSUMÉ

*Le but de cet article est d'essayer de montrer que l'étude de la propagation d'une onde à la surface de l'eau par un enregistrement en continu (sans utiliser de webcam assez mal adaptée à l'étude de phénomènes périodiques de fréquence voisine de celle de la caméra), avec du matériel existant déjà dans les collections des lycées, peut être intéressante à exploiter.*

*Après avoir mesuré la célérité (vitesse de phase) d'une onde puis mis en évidence la dispersion il est proposé un montage permettant de mettre en évidence l'effet Doppler et d'effectuer quelques mesures.*

## INTRODUCTION

Dans l'enseignement secondaire, les cuves à onde sont des dispositifs privilégiés pour illustrer de façon spectaculaire les phénomènes de propagation, en prenant comme exemple les ondes de gravité. Cependant, quelques difficultés peuvent apparaître si on veut dépasser le stade de l'observation purement qualitative. En premier, il y a des problèmes pratiques d'enregistrement de ces ondes ; un des buts de cet article est de présenter un schéma expérimental, reprenant des capteurs de lumière utilisés dans l'enseignement des anciens programmes de terminale S, et de montrer les enregistrements obtenus, qui sont tout à fait satisfaisants : notamment, ils montrent de façon saisissante la formation d'un paquet d'ondes à dérive de fréquence à la surface de l'eau. Un tel phénomène est un effet bien connu de la propagation dans un milieu suffisamment dispersif, dont le traitement est la deuxième difficulté inhérente à ces expériences ; nous montrerons diverses mesures permettant de quantifier la dispersion des ondes à la surface de l'eau.

Pour cela, nous estimerons d'abord la célérité des maxima d'une onde quasi-périodique mais non sinusoïdale. Ensuite, nous étudierons la propagation d'un paquet d'ondes : nous verrons son étalement et la dérive de fréquence, puis nous mesurerons la célérité de son front et de sa queue ainsi que leurs fréquences locales respectives. Enfin, nous effectuerons une pré-

sentation de l'effet Doppler pour ces ondes, et nous montrerons qu'une application des formules classiques permet de rendre compte des observations avec une précision qui semble voisine de celle de nos mesures, à condition de tenir compte judicieusement de la dispersion ce qui rajoute une autre difficulté supplémentaire à toutes celles déjà discutées dans un article récent [1].

## 1. MESURE DE LA CÉLÉRITÉ D'UNE ONDE CIRCULAIRE

La figure 1 présente le montage que nous nous proposons d'exploiter dans cet article.

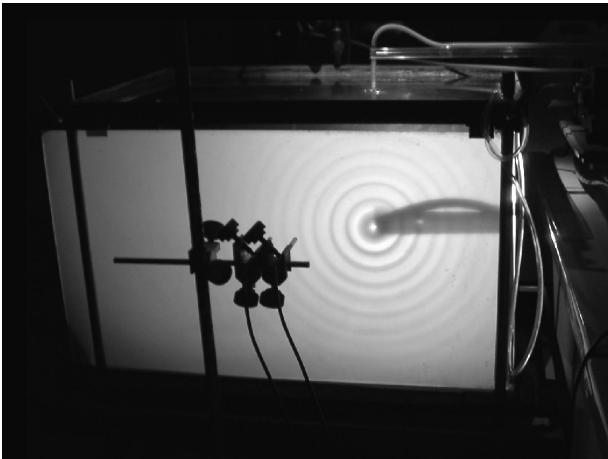


Figure 1 : Photographie de la cuve à ondes et des deux capteurs.

*Photo 1*

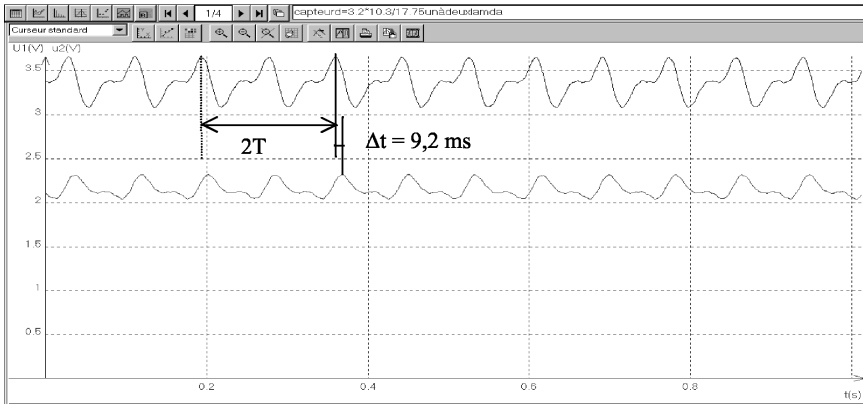
- ◆ *Le dépoli vertical.*
- ◆ *La source alimentée en air pulsé.*
- ◆ *L'image de la source.*
- ◆ *Les deux capteurs.*

### 1.1. Le dispositif

- ◆ Une cuve à ondes, avec une faible profondeur d'eau.
- ◆ Un dépoli ; le grandissement entre la surface de l'eau et le dépoli, mesuré avec une cale de 10 cm de longueur est égal à  $G = 1,72$  pour la cuve utilisée.
- ◆ Une source d'ondes circulaires, à air pulsé.
- ◆ Deux capteurs photosensibles (luxmètres), placés sur un rayon des ondes circulaires, distants de  $d' = 3,2$  cm telle que  $d'$  soit voisin de deux fois la longueur d'onde apparente  $\lambda'$ . Ces capteurs conçus lors de l'étude du signal lumineux sur un écran de télévision (anciens programmes de terminale S) sont constitués d'un tube d'aluminium contenant un phototransistor, relié par un fil blindé à un boîtier contenant une pile 9 V, un conducteur ohmique, et une sortie permettant de mesurer une tension pratiquement proportionnelle à l'éclairement du phototransistor.
- ◆ Les sorties des capteurs sont reliées aux voies 1 et 2 d'une interface Candibus.

### 1.2. Les mesures

L'enregistrement obtenu est reproduit sur la figure 2.



**Figure 2 :** Enregistrements donnés par les deux capteurs distants de 3,2 cm.

On mesure : avec le curseur de « Regressi » la période temporelle  $T = 83 \text{ ms}$  (on déduit la fréquence  $f \approx 12 \text{ Hz}$ ).

$$\Delta t \approx 9,2 \text{ ms.}$$

Les deux capteurs sont distants de  $d' = 3,2 \text{ cm}$ .

Les deux points étudiés à la surface du liquide sont distants de  $d = d' / G$

$$d = 3,2 \text{ cm} / 1,72 = 1,86 \text{ cm.}$$

La durée du parcours de l'onde est égale à :  $\Delta t' = 2 * T + \Delta t$

$$\Delta t' = 2 * 83 \text{ ms} + 9,2 \text{ ms} = 175,2 \text{ ms.}$$

(On choisit  $2T$  car au début des essais on a réglé l'écart  $d'$  entre les deux capteurs égal à  $2\lambda'$  à proximité du dépoli).

La célérité des maxima principaux de l'onde étudiée est donc :

$$v = d / \Delta t' \quad v = 1,86 \text{ cm} / 175,2 \cdot 10^{-3} \text{ s} = 11 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}.$$

### 1.3. Notes

- ◆ On peut expliquer l'atténuation des signaux observés d'un capteur à l'autre, car la dilution de l'onde à la surface du liquide correspond à une amplitude moins grande, donc à une déformation moins grande de la surface du liquide ; il en résulte, par réfraction, une variation d'éclairement moins importante vers le capteur, et une tension de sortie du capteur plus faible.
- ◆ J'attribue la déformation de l'onde observée d'un capteur à l'autre (en plus de l'amortissement) à la différence de vitesse de phase des deux composantes de l'onde étudiée, celle-

ci n'étant pas parfaitement sinusoïdale, une analyse de Fourier FFT donnant deux composantes de fréquence : 11,8 Hz et 23,6 Hz (cf. figure 3).

- ◆ On pourrait ensuite effectuer une étude quantitative de la dispersion en mesurant la célérité de l'onde sinusoïdale (c'est-à-dire, plus rigoureusement, la vitesse de phase) pour différentes fréquences de la source.

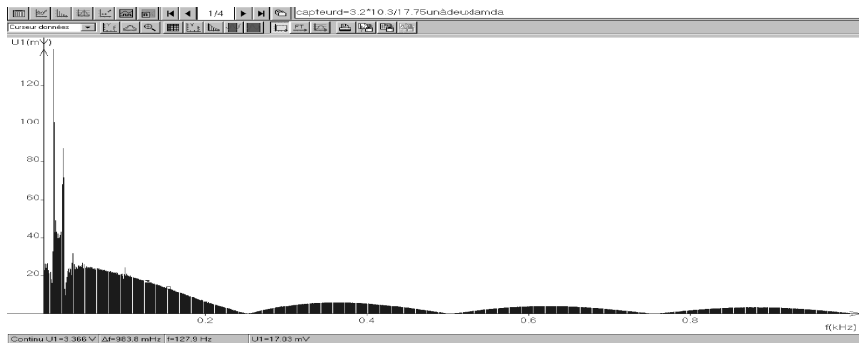


Figure 3 : Analyse de Fourier du signal étudié (avec Regressi).

## 2. PROPAGATION D'UN ÉBRANLEMENT (OU TRAIN D'ONDES)

### 2.1. Les deux capteurs sont proches de la source

Le premier capteur est à environ 3 cm de l'image de la source, les deux capteurs sont séparés de 3,2 cm. L'ébranlement (*train d'ondes*) est produit par une pointe qui est soulevée vivement. La cuve contient une nappe d'eau de profondeur différente de celle étudiée dans le paragraphe précédent (l'expérience ayant été réalisée un autre jour).

#### 2.1.1. Les enregistrements

Deux exemples d'enregistrements obtenus sont reproduits sur la figure 4 ci-contre.

#### 2.1.2. Observations, interprétation

Le signal émis est complexe et le pouvoir dispersif du milieu va le déformer en un paquet d'ondes étalé et à dérive de fréquence. On voit que les hautes fréquences arrivent en premier : ceci est un effet notable de la dispersion. Nous allons la quantifier par la suite.

### 2.2. Les deux capteurs sont plus éloignés de la source

Le premier capteur est à environ 12 cm de l'image de la source, les deux capteurs sont séparés de 3,2 cm. L'ébranlement est encore produit par une pointe qui est soulevée vivement.

#### 2.2.1. Les enregistrements

Deux exemples d'enregistrements obtenus sont reproduits sur la figure 5 ci-contre.

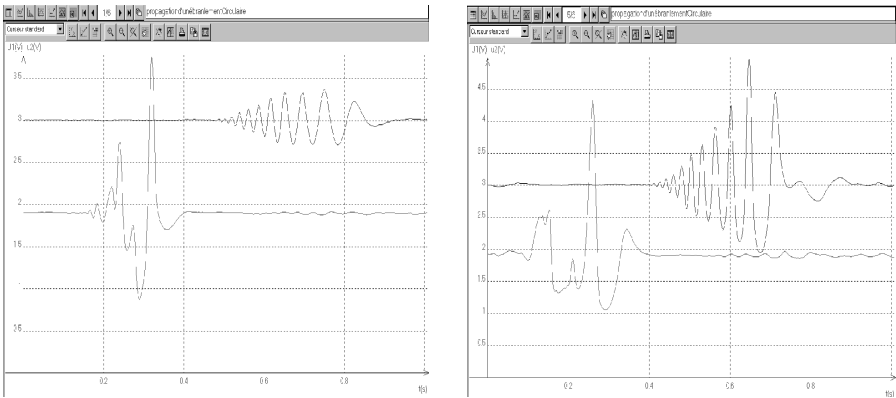


Figure 4 : Deux enregistrements obtenus lorsque les capteurs sont proches de la source.

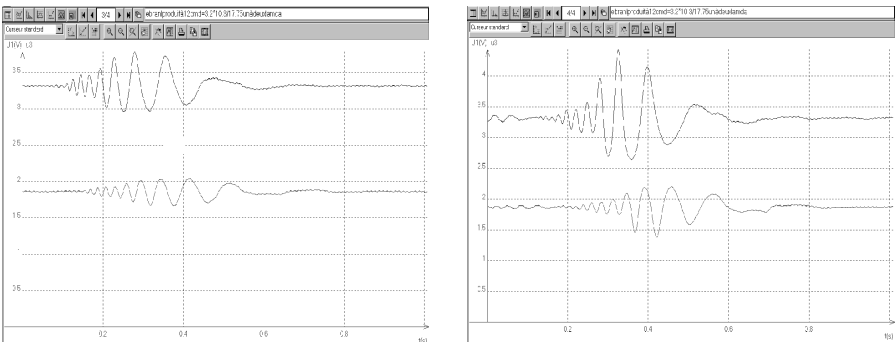


Figure 5 : Deux enregistrements obtenus lorsque les capteurs sont éloignés de la source.

### 2.2.2. Observations, interprétation

Le signal, durant sa propagation entre les deux capteurs, subit une déformation moins importante, excepté l'amortissement observé, car le milieu dispersif a déjà étalé le paquet d'ondes, et le dispositif va permettre de donner un ordre de grandeur des différentes célérités (ou vitesses de phase) suivant les fréquences respectives.

## 3. OBSERVATION DE LA DISPERSION DES ONDES À LA SURFACE DE L'EAU

### 3.1. Enregistrement où le premier capteur est éloigné de 12 cm de l'image de la source

On étudie un enregistrement (cf. figure 6) de la même série que les enregistrements précédents.

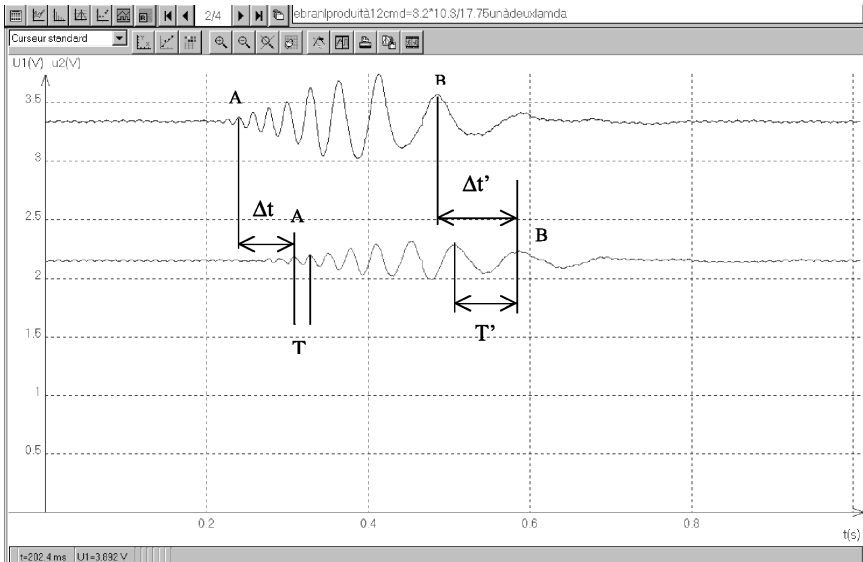


Figure 6 : Le premier capteur est éloigné de 12 cm de l'image de la source.

### 3.2. Célérités de deux points A et B du signal

**3.2.1.** Célérité du point A du signal, point le plus éloigné de la source ; ce point correspond au « front » de l'ébranlement, qui atteint en premier le capteur le plus proche de la source : on mesure  $\Delta t = 69$  ms

$$V_A = \Delta x / \Delta t = (d/G) / \Delta t \quad V_A = (3,2 \text{ cm} / 1,72) / (69 * 10^{-3} \text{ s}) = 27 \text{ cm/s}$$

**3.2.2.** Célérité du point B du signal, point le plus proche de la source ; ce point correspond à la « queue » de l'ébranlement et il est situé sept crêtes après la crête A : on mesure  $\Delta t' = 107$  ms

$$V_B = \Delta x / \Delta t = (d/G) / \Delta t' \quad V_B = (3,2 \text{ cm} / 1,72) / (107 * 10^{-3} \text{ s}) = 17 \text{ cm/s}$$

### 3.3. Fréquences associées aux déformations au niveau des points A et B

On peut évaluer la « pseudo-période » au niveau de ces deux points, on trouve :

**3.3.1.** Pour le point A le plus éloigné de la source, ayant mesuré la période :  $T = T_A \approx 18$  ms ; on déduit la fréquence :  $N_A \approx 56$  Hz.

**3.3.2.** Pour le point B le plus proche de la source, ayant mesuré la période :  $T' = T_B \approx 84$  ms ; on déduit la fréquence :  $N_B \approx 12$  Hz.

**3.3.3. Note :** Les points B ont été choisis par corrélation des formes entre les deux signaux enregistrés par les deux capteurs.

### 3.4. Interprétation

Les mesures réalisées confirment que la nappe d'eau étudiée est bien un milieu dispersif et qu'ici les signaux de plus grande fréquence se propagent nettement plus vite que ceux de fréquence inférieure :

$$V_A = 27 \text{ cm/s} \quad N_A \approx 56 \text{ Hz} \quad \text{et} \quad V_B = 17 \text{ cm/s} \quad N_B \approx 12 \text{ Hz}$$

ce qui permet d'interpréter la forme classique de l'onde circulaire provoquée par la chute d'un objet solide ou liquide de petites dimensions sur la surface de l'eau : en s'éloignant du point de chute, les rides circulaires correspondant aux fréquences les plus élevées progressent plus rapidement, dans le cas des ondes capillaires [2].

## 4. EFFET DOPPLER À LA SURFACE DE L'EAU (Source mobile, détecteur fixe)

On pourra consulter avec profit la référence [3].

### 4.1. Le dispositif

- ◆ L'appareillage utilisé pour obtenir un déplacement rectiligne et *quasiment uniforme de la source*, dont la vitesse est mesurable, est un bloc chariot d'imprimante bricolé et adapté au montage envisagé (cf. figure 7).
- ◆ Le capteur (phototransistor utilisé précédemment) permettant d'étudier l'onde en un point du milieu est placé devant le dépoli, *contre l'image de la droite parcourue par l'émetteur*, à une dizaine de centimètres du point de départ de celui-ci.



Figure 7 : Photographie de la cuve et de la source d'air pulsé en mouvement.

#### Photo 2

- ◆ Le chariot.
- ◆ L'alimentation ajustable 0-12 V.
- ◆ Le bras du chariot en mouvement.
- ◆ Le bras portant le tube PVC alimenté en air pulsé.
- ◆ Le dépoli avec l'image de l'effet Doppler observé.

#### 4.1.1. Le bloc chariot d'imprimante

Le tube de polyéthylène issu du générateur d'air pulsé de la cuve à ondes a été rallongé

et fixé sur un « bras » vissé sur la « tête » d'un chariot d'imprimante récupéré sur une vieille imprimante déclassée. Pour ce type de chariot, la tête est reliée par une courroie crantée à un moteur à courant continu qui commande le déplacement horizontal. Le moteur sera alimenté par une tension réglable :  $0\text{ V} < U < 7\text{ V}$ . La vitesse de déplacement est croissante avec la tension, et relativement stable pour une tension donnée.

#### 4.1.2. Mesure de la longueur du déplacement de la tête du chariot

L'électronique propre au bloc chariot, qui doit transmettre la position de la tête du chariot à l'ordinateur comporte, comme une souris :

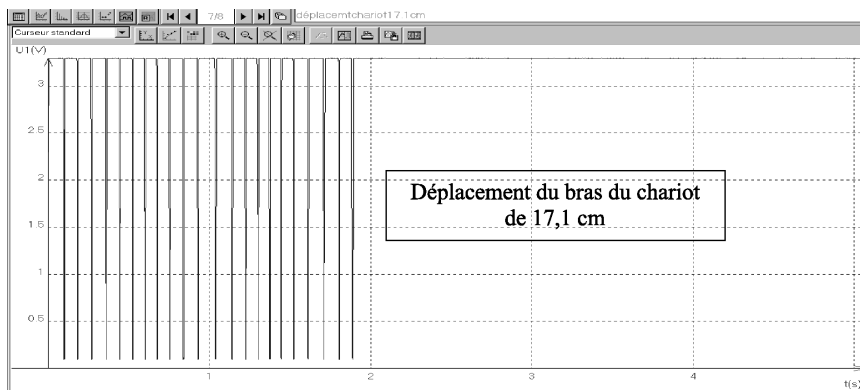
- une source de lumière (LED) ;
- un disque comportant des secteurs transparents et opaques régulièrement espacés dont la rotation est liée au déplacement rectiligne du chariot ;
- un phototransistor alimenté sous une tension  $U$  telle que :  $12\text{ V} < U < 15\text{ V}$ .

*En fait il s'agit d'une fourche optoélectronique déclenchée par la rotation du disque à secteurs couplé au moteur.*

On alimente l'électronique sous  $15\text{ V}$ , on relie la sortie de la fourche optoélectronique à l'interface Candibus, on règle la tension de seuil de déclenchement à  $1,5\text{ V}$  front montant, et on déplace à la main la tête du chariot d'une distance arbitraire, puis on mesure cette distance. On compte ensuite le nombre de déclenchements du transistor.

Par exemple sur l'enregistrement de la figure 8 : pour un déplacement manuel arbitraire mesuré égal à  $d = 17,1\text{ cm}$ , on compte vingt-deux intervalles. Entre deux déclenchements successifs du transistor, le déplacement du chariot est donc ici égal à :

$$17,1\text{ cm} / 22 = 0,777\text{ cm}.$$



**Figure 8** : Signal fourni par la fourche optoélectronique lors du déplacement manuel du bras du chariot sur une distance de  $17,1\text{ cm}$ .

Une moyenne sur huit enregistrements conduit au résultat suivant : la distance parcourue par la tête du chariot entre deux déclenchements du transistor est égale à :  $d_1 = 0,78\text{ cm}$ .



### 4.1.3. Mesure de la vitesse du bras vissé sur la tête du chariot

Par exemple, pour l'enregistrement précédent (en supposant le mouvement uniforme car le bras a été déplacé à la main) on peut calculer :

- ◆ le déplacement : on compte vingt-deux intervalles donc :  
 $d = 22 * d_1$  ;  $d = 22 * 0,78 \text{ m} = 17,2 \text{ cm}$  ;
- ◆ la durée : lue sur l'enregistrement  $\Delta t = 1,88 \text{ s}$  ;
- ◆ la vitesse moyenne :  $v = d / \Delta t$  soit  $v = 17,2 \text{ cm} / 1,88 \text{ s} = 9,14 \text{ cm/s}$ .

## 4.2. Production et enregistrement d'un effet Doppler à la surface de l'eau

### 4.2.1. Vitesse de la source voisine du tiers de la célérité de l'onde

#### 4.2.1.1. Réglages

On règle la tension aux bornes du moteur à 3,4 V puis on ferme l'interrupteur pour lancer le chariot et l'enregistrement.

#### 4.2.1.2. Enregistrement

L'enregistrement obtenu est reproduit sur la figure 9.

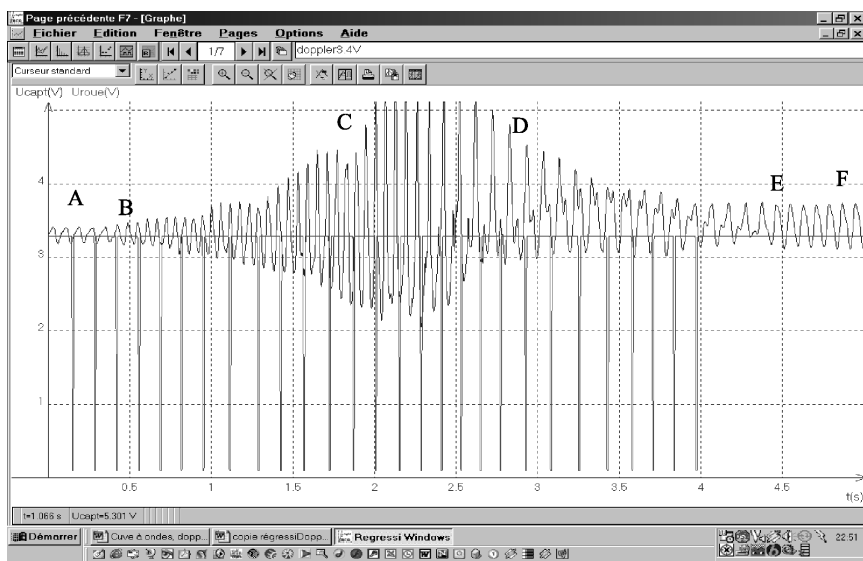


Figure 9 : Signaux délivrés par la fourche optoélectronique et le capteur lorsque la vitesse de la source est 5,61 cm/s.

#### 4.2.1.3. Exploitation

- ◆ Vitesse de déplacement du bras et de la source : en comptant vingt intervalles sur l'en-

enregistrement (partie inférieure de l'enregistrement de la figure 9) :

$$v = d/\Delta t = 20 \cdot d_1 / \Delta t \quad v = 20 \cdot 0,78 \text{ cm} / 2,78 \text{ s} = 5,61 \text{ cm/s}$$

- ◆ Fréquence de la source : sur EF (correspondant à la source immobile) on lit 6,3 périodes enregistrées par le capteur immobile en 0,5 s, on en déduit la période et la fréquence de la source :  $T = 0,5 \text{ s} / 6,3 = 0,079 \text{ s}$  et  $N = 12,6 \text{ Hz}$ .

#### 4.2.1.3.1. La source se rapproche

- ◆ Fréquence de l'onde reçue lorsque la source se rapproche : sur BC on lit 8,5 périodes en 0,5 s, on en déduit :  $T_1 = 0,5 \text{ s} / 8,5 = 0,058 \text{ s}$  et  $N_1 = 17 \text{ Hz}$  (mesurée).
- ◆ L'application de la relation classique du décalage Doppler dans un milieu dispersif, pour des ondes sinusoïdales, conduit à la valeur théorique  $N'_1$  en faisant intervenir la vitesse de phase  $c_1$  de l'onde sinusoïdale dont la fréquence est  $N_1$ , dans le référentiel du milieu, entre l'émetteur et le récepteur.

La valeur de la vitesse de phase d'une onde sinusoïdale de fréquence 17 Hz dans le milieu étudié ayant été mesurée séparément puis extrapolée, on a trouvé pour cette épaisseur d'eau :  $c_1 = 17,4 \text{ cm/s}$ .

$$N'_1 = N / (1 + v/c_1) \quad \text{soit} \quad N'_1 = 12,6 \text{ Hz} / (1 + 5,61 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1} / 17,4 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}) = 18,6 \text{ Hz}$$

L'écart relatif entre les deux valeurs  $N_1$  et  $N'_1$  est de l'ordre de 9 %.

#### 4.2.1.3.2. La source s'éloigne

- ◆ Fréquence de l'onde reçue lorsque la source s'éloigne : sur DE on lit cinq périodes en 0,568 s, on en déduit :  $T_2 = 0,568 \text{ s} / 5 = 0,114 \text{ s}$  et  $N_2 = 9,6 \text{ Hz}$  (mesurée).
- ◆ L'application de la relation classique, pour des ondes sinusoïdales, conduit de même à la valeur théorique  $N'_2$  ; la valeur de la vitesse de phase d'une onde de fréquence 9,6 Hz, pour cette épaisseur d'eau, étant trouvée égale à  $c_2 = 15,0 \text{ cm/s}$ .

$$N'_2 = N / (1 - v/c_2) \quad \text{soit} \quad N'_2 = 12,6 \text{ Hz} / (1 - 5,61 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1} / 15 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}) = 9,0 \text{ Hz}$$

L'écart relatif entre les deux valeurs  $N_2$  et  $N'_2$  est de l'ordre de 7 %.

### 4.2.2. Vitesse de la source voisine de la moitié de la célérité de l'onde

#### 4.2.2.1. Réglages

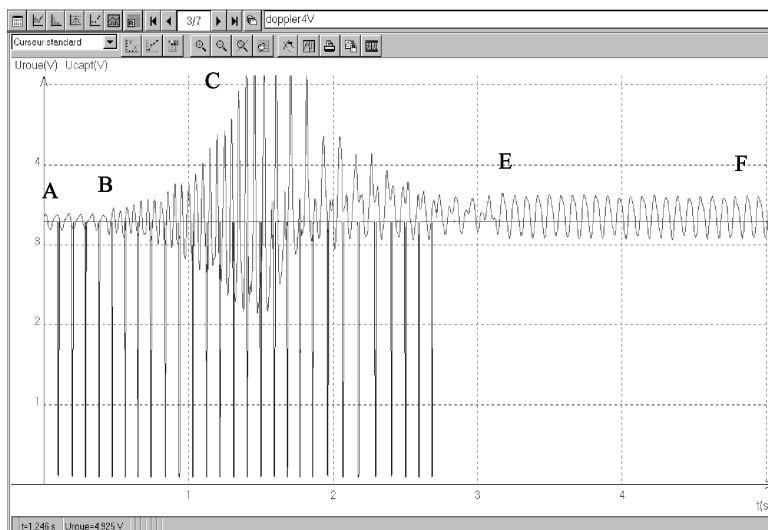
On règle la tension aux bornes du moteur à 4,2 V puis on ferme l'interrupteur pour lancer le chariot.

#### 4.2.2.2. Enregistrement

L'enregistrement obtenu est reproduit sur la figure 10.

#### 4.2.2.3. Exploitation

Les calculs et les mesures sont identiques à ceux effectués au paragraphe 4.2.1., les



**Figure 10 :** Signaux délivrés par la fourche optoélectronique et le capteur lorsque la vitesse de la source est 8,67 cm/s.

résultats obtenus sont reportés dans la cinquième colonne du tableau de la figure 11.

### 4.3. Résultats obtenus sur une série de mesures

Ces résultats sont reportés dans le tableau de la figure 11.

				§ : 4.2.1	§ : 4.2.2		
Tension moteur (V)	4	4,1	5	3,4	3,1	4,2	4,7
v cm/s	7,16	7,35	11,6	5,61	4,7	8,67	9,7
N source	12,3	12,1	12,2	12,6	12,4	12,6	12,4
c cm/s	16	16	16	16	16	16	16
N1 (s'approche, mesurée)	20	21,2	28,6	17	15,7	20,8	26
c1 (mesurée)	18,0	18,3	19,3	17,4	17,0	18,3	20,4
N'1 calculée	20,4	20,2	30,6	18,6	17,1	23,9	23,6
<b>Écart relatif (N'1 - N1) / N</b>	<b>0,02</b>	<b>-0,05</b>	<b>0,07</b>	<b>0,09</b>	<b>0,09</b>	<b>0,14</b>	<b>-0,10</b>
N2 (s'éloigne, mesurée)	10,1	9,1	6,9	9,6	10,2	7,6	7,7
c2 (mesurée)	15,0	15,0	14,2	15,0	15,0	14,5	14,5
N'2 calculée	8,3	8,3	6,8	9	9,4	7,7	7,4
<b>Écart relatif (N'2 - N2) / N</b>	<b>-0,19</b>	<b>-0,10</b>	<b>-0,02</b>	<b>-0,07</b>	<b>-0,09</b>	<b>0,01</b>	<b>-0,04</b>

**Figure 11 :** Résultats obtenus pour une série de mesure.

#### 4.4. Conclusions

On constate que les résultats obtenus peuvent s'écarter sensiblement des valeurs théoriques, mais que les écarts restent souvent inférieurs ou égaux à 10 %.

On peut attribuer l'importance de ces écarts aux difficultés rencontrées à deux stades de l'expérience : tout d'abord le positionnement du récepteur exactement sur la droite image du déplacement de l'émetteur n'est pas évident, ensuite la précision de l'évaluation des vitesses de phase  $c_1$  et  $c_2$  aux différentes fréquences pour la nappe d'eau étudiée à partir de quelques mesures suivies d'une extrapolation pourrait être améliorée.

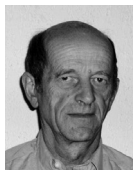
L'intérêt du dispositif réside essentiellement dans la possibilité de présenter qualitativement l'effet Doppler pour un milieu dispersif tel que la nappe d'eau étudiée, en permettant de visualiser de façon reproductible l'aspect de la surface de l'eau pour différentes vitesses de la source.

L'effet Doppler n'est pas au programme de terminale S, mais certains groupes d'élèves peuvent l'évoquer dans le cadre des TPE (Travaux personnels encadrés) dans de nombreux sujets en s'appuyant sur un dispositif expérimental dont la réalisation reste à leur portée.

*Note :* Le terme « célérité » a peut-être été employé de façon abusive en lieu et place de « vitesse de phase » qui aurait été plus approprié, mais la lecture des programmes de terminale S a probablement conduit à cet écart de langage.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] LEROY-BURY J.-L. et VIENNOT L. Doppler et Römer : physique et mathématique à l'œuvre. *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.*, décembre 2003, vol. 97, n° 859 (1), p. 1595-1611.
- [2] LAGOUTTE C. À propos des ondes de la cuve à ondes. *Bull. Un. Phys.*, mars 2003, vol. 97, n° 852, p. 441-454.
- [3] SERRA G. Étude expérimentale de l'effet Doppler avec une cuve à ondes. *Bull. Un. Phys.*, mars 1997, vol. 91, n° 792 (1), p. 407-416.



**Jean-Marie GREUET**  
Professeur  
Lycée Clémenceau  
Montpellier (Hérault)



**Jean-Pierre LEMOINE**  
Aide technique au SAMS  
Lycée Joffre  
Montpellier (Hérault)

## Annexe

### Formule de l'effet Doppler classique en milieu dispersif

par **Luc DETTWILLER**

Lycée Blaise Pascal - 63037 Clermont-Ferrand Cedex

dettwillerluc@voila.fr

#### **Cas où les vitesses de l'émetteur et du récepteur ont des directions quelconques**

Lorsqu'un émetteur  $P$  et un récepteur  $P'$  sont mobiles à des vitesses  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{v}'$  par rapport à un milieu dans lequel se propagent des ondes sinusoïdales, une surface équi-phase émise par  $P$  à la date  $t$  sera reçue par  $P'$  à la date  $t'$  telle que

$$[\mathbf{P}(t)\mathbf{P}'(t')]^2 = c^2 (t' - t)^2 \tag{1}$$

où  $c$  désigne la vitesse (de phase) de l'onde (sinusoïdale) ; comme on supposera par la suite que  $c$  est indépendant de la direction de propagation, sa valeur est définie par rapport au milieu de propagation (au repos) - cette indication est importante pour la suite de la discussion.

En admettant que les périodes des signaux émis et reçus sont assez courtes pour qu'on puisse les assimiler à des différentielles  $dt$  et  $dt'$  respectivement, la différentiation de la relation (1) donne (comme on a supposé que  $c$  reste constant alors que la direction du vecteur  $\mathbf{P}(t)\mathbf{P}'(t')$  varie)

$$2[\mathbf{P}(t)\mathbf{P}'(t')] \cdot [\mathbf{v}'(t')dt' - \mathbf{v}(t)dt] = 2c^2 (t' - t)(dt' - dt) ; \tag{2}$$

dans le cadre de l'hypothèse galiléenne du temps absolu (donc pour des vitesses faibles vis-à-vis de celle de la lumière dans le vide) on en déduit le rapport  $\frac{v'(t')}{v(t)} \cong \frac{dt}{dt'}$  des fréquences locales  $v(t)$  et  $v'(t')$  enregistrées par  $P$  et  $P'$  aux instants de dates  $t$  et  $t'$  respectivement, en faisant intervenir le vecteur unitaire  $\mathbf{u} \equiv \mathbf{P}(t)\mathbf{P}'(t') / \|\mathbf{P}(t)\mathbf{P}'(t')\| \equiv \mathbf{P}(t)\mathbf{P}'(t') / c(t' - t)$  qui dépend de  $t$  et  $t'$  :

$$\frac{v'(t')}{v(t)} \cong \frac{c - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}'(t')}{c - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}(t)} \tag{3}$$

La vitesse de phase  $c$  étant celle de l'onde dans le référentiel du milieu, comme celui-ci est dispersif on doit préciser que  $c$  est prise à la fréquence  $v_m$  de l'onde dans ce milieu ; or  $v_m$  est la valeur prise par  $v'$  lorsque  $\mathbf{v}'$  est nul, donc

$$\frac{v_m}{v(t)} \cong \frac{c}{c - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}(t)} \tag{4}$$

Cependant, cette analyse montre qu'un émetteur sinusoïdal de fréquence  $v$  (constante

par définition), animé d'un mouvement quelconque par rapport à un milieu de propagation, n'engendre pas une onde sinusoïdale dans l'espace occupé par ce milieu, mais une onde pseudo-sinusoïdale à dérive de fréquence : car  $v_m$ , au lieu de rester constant, varie au cours du temps selon l'évolution de la direction de  $\mathbf{u}$  - donc du segment  $P(t)P'(t)...$

**Cas où les mouvements de l'émetteur et du récepteur sont rectilignes uniformes sur la même droite dans le référentiel du milieu**

Néanmoins, dans le cas où l'émetteur se meut rectilignement (sur une droite choisie comme axe des abscisses  $Ox$ ) à vitesse constante par rapport au milieu de propagation, on peut trouver une onde sinusoïdale (sans dérive de fréquence) dans ce milieu lorsqu'on se limite à son observation sur les points de  $Ox$  (d'abscisse  $x$ ) ; c'est le cas de l'expérience étudiée dans cet article. L'émetteur sinusoïdal, d'abscisse  $X(t)$  et de pulsation  $\omega$  fixée (et constante) engendre sur  $Ox$  un signal  $s$  de pulsation  $\omega_m$  (constante) et de représentation complexe

$$s(x, t) = a \exp i \omega_m \left( t \mp \frac{x}{c(\omega_m)} \right) \tag{5}$$

– où  $c(\omega_m)$  désigne la vitesse de phase à la pulsation  $\omega_m$  ; le choix du signe dans (5), et donc de la valeur de  $\omega_m$ , dépendent du signe de  $x - X(t)$  !

En supposant  $x > X(t)$ , la pulsation locale de l'émetteur est reliée à  $\omega_m$  par

$$\omega \equiv \frac{d}{dt} \arg s(X(t), t) = \omega_m \left[ 1 - \frac{\dot{X}}{c(\omega_m)} \right]. \tag{6}$$

Si le récepteur se déplace uniformément aussi sur l'axe  $Ox$  selon la loi horaire  $X'(t)$ , supposé supérieur à  $X(t)$ , on enregistre sur lui la pulsation locale constante

$$\omega' \equiv \frac{d}{dt} \arg s(X'(t), t) = \omega_m \left[ 1 - \frac{\dot{X}'}{c(\omega_m)} \right]; \tag{7}$$

dans le cas contraire où  $X'(t) < X(t)$ , le signe « moins » de la relation (7) doit être changé en « plus », et il faut y mettre la nouvelle valeur de  $\omega_m$  donnée (en fonction de  $\omega$  fixée) par la nouvelle équation

$$\omega = \omega_m \left[ 1 + \frac{\dot{X}}{c(\omega_m)} \right], \tag{8}$$

$c(\omega_m)$  désignant la nouvelle vitesse de phase à la nouvelle pulsation  $\omega_m$ . Ces résultats (6)-(8) sont cohérents avec les relations (3) et (4).

**Lien avec la vitesse de groupe**

Si on considère maintenant que la vitesse  $\dot{X}$  est lentement variable au voisinage de  $\dot{X}_0$  à l'échelle de  $T_m \equiv 1/v_m \equiv 2\pi/\omega_m$ , l'émetteur sinusoïdal de pulsation  $\omega$  constante engendre sur  $Ox$  dans le milieu une onde pseudo-sinusoïdale de pulsation locale

$$\omega_m(t) \cong \omega \left[ 1 - \frac{x - X(t)}{|x - X(t)|} \frac{\dot{X}(t)}{c(\omega_{0m})} \right]^{-1}, \quad (9)$$

où la relation de dispersion  $c(\omega)$  permet de définir  $\omega_{0m}$  par l'équation

$$\omega_{0m} \equiv \omega \left[ 1 - \frac{x - X(t)}{|x - X(t)|} \frac{\dot{X}_0}{c(\omega_{0m})} \right]^{-1}. \quad (10)$$

Cette relation s'applique bien à la situation étudiée dans le présent article, puisqu'on détecte expérimentalement le passage de certains maxima de l'onde (donc de points de *phase constante*) sur un détecteur fixe par rapport au milieu de propagation ; pour une onde dont la pulsation dérive au voisinage de  $\omega_{0m}$ , la vitesse de propagation de ces points est donc voisine de la vitesse de phase  $c(\omega_{0m})$ .

Par contre, le signal constitué non par un maximum mais par l'*écart* entre deux maxima consécutifs se propage à la vitesse *de groupe*, qui est aussi la vitesse des pulsations *locales* !<sup>(1)</sup>

## REMERCIEMENTS

En tant que membre du comité de rédaction, lors de l'analyse du manuscrit soumis au BUP par M. GREUET, j'ai eu avec lui la discussion présentée dans cette annexe ; il m'a invité à la rédiger pour l'ajouter à son article afin de l'éclairer, ce dont je le remercie au nom du BUP.



**Luc DETTWILLER**  
*Professeur en PC\**  
 Lycée Blaise Pascal  
 Clermont-Ferrand (Puy-de-Dôme)

(1) Pour une démonstration de ces propriétés, voir par exemple les passages suivants de l'encyclopédie EGEM : L. DETTWILLER, « Propagation de la lumière, dispersion et absorption » - in *Optique géométrique et propagation*, J.-L. MEYZONNETTE éd. (Hermès Lavoisier, Paris, 2003) - chap. 1 (§ 1.5.3. et 1.5.4.3. pour la vitesse de groupe, § 1.5.4.7. pour celle des pulsations locales).